

## THÉORIE DES GROUPES 2024-25, SOLUTIONS 12

**Exercice 1.** À faire vous-même.

**Exercice 2.** Soit  $g$  le morphisme  $G \rightarrow F$  dans la suite exacte courte. Soit  $A \subset F$  un ensemble de générateurs de  $F$ , c'est-à-dire  $F \cong \langle A \rangle$ . Pour chaque  $a_\alpha \in A$ , soit  $b_\alpha \in G$  une préimage arbitraire de  $a_\alpha$  par  $g$  (on peut toujours trouver au moins une telle préimage, car  $g$  est surjective). Considérons l'application  $\varphi : A \rightarrow G$  définie par  $a_\alpha \mapsto b_\alpha$ . Comme  $F$  est libre avec des générateurs dans  $A$ ,  $\varphi$  induit un homomorphisme de groupes  $\varphi : F \rightarrow G$ . Il est clair que la composition  $g \circ \varphi$  fixe tous les générateurs de  $F$ , et encore par la propriété universelle, nous concluons que cette application doit être l'identité sur  $F$ , c'est-à-dire que  $g$  scinde.

**Exercice 3.** Pour prouver que  $F$  est sans torsion, nous observons que tout élément de  $F$  peut s'écrire sous la forme  $\alpha\beta\alpha^{-1}$ , où  $\beta$  est un mot réduit cycliquement, c'est-à-dire que si  $\beta = s_1 \cdots s_n$ , alors  $s_1 \neq s_n^{-1}$ . Pour tout  $m > 0$ , nous avons

$$(\alpha\beta\alpha^{-1})^m = \alpha\beta^m\alpha^{-1},$$

et comme  $\beta$  est réduit cycliquement, aucune annulation ne peut se produire à l'intérieur de  $\beta^m$ . Ainsi, si  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  était non trivial, alors  $(\alpha\beta\alpha^{-1})^m$  reste non trivial pour tout  $m > 0$ , ce qui prouve que  $F$  est sans torsion.

Maintenant, soit  $a \in F \setminus \{1\}$  et notons par  $x$  la dernière lettre (élément de  $S$ ) de la forme réduite de  $a$ . Comme  $|S| \geq 2$ , nous pouvons choisir  $y \in S$  différent de  $x$ . Il est alors facile de vérifier que  $ay \neq ya$ , donc  $a$  n'appartient pas au centre de  $F$ . Par le choix arbitraire de  $a$ , nous concluons que le centre est trivial.

**Exercice 4.** Considérons l'application  $\varphi : X \cup Y \rightarrow F_X$  définie par l'identité sur  $X$  et envoyant les éléments de  $Y$  sur le mot vide. Elle induit un homomorphisme de groupes surjectif

$$\varphi : F_{X \cup Y} \rightarrow F_X.$$

Montrons que son noyau est le sous-groupe normal engendré par  $Y$  pour conclure par le premier théorème d'isomorphisme.

Le sous-groupe normal engendré par  $Y$  est évidemment contenu dans  $\ker \varphi$ , car  $\varphi$  envoie les générateurs venant de  $Y$  sur le mot vide.

Maintenant, soit  $a$  un élément de  $\ker \varphi$ , et écrivons  $a = X_1 Y_2 X_2 \dots X_n Y_n$ , où  $X_i$  sont des éléments de  $F_X$  et  $Y_i$  sont des éléments de  $F_Y$  (éventuellement 1). Alors

$$1 = \varphi(a) = X_1 X_2 \dots X_n,$$

et nous devons donc avoir  $X_n = X_{n-1}^{-1} \dots X_1^{-1}$ . Ainsi

$$a = X_1 Y_1 \dots X_{n-1} Y_{n-1} (X_{n-1}^{-1} \dots X_1^{-1}) Y_n = X_1 (Y_1 X_2 (\dots) X_2^{-1}) X_1^{-1} Y_n,$$

ce qui est clairement un élément du sous-groupe normal engendré par  $Y$ , donc c'est terminé.

**Exercice 5.** (1) Puisque  $i^2 = j^2 = k^2$ , nous avons  $-1 = i^2$ , qui commute avec les générateurs  $i, j$  et  $k$ . Ainsi  $-1 \in Z(Q_8)$ .

(2) En utilisant les relations, observez que

$$ij = k, jk = i, ki = j, ij = -ji, jk = -kj, ki = -ki.$$

En utilisant cela, tout mot en  $i, j$  et  $k$  peut être écrit comme un élément de l'ensemble  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ . Par conséquent,  $|Q_8| = 8$ .

(3) Dans la dernière partie, nous avons montré que  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ . En utilisant les identités des produits d'éléments écrites dans la dernière partie, il s'ensuit que les seuls éléments centraux sont 1 et  $-1$ . Ainsi  $Z(Q_8) = \{-1, 1\}$ .

(4) Si  $H$  est un sous-groupe non trivial et propre de  $Q_8$ , alors il est d'ordre 2 ou 4. Puisque l'indice d'un sous-groupe d'ordre 4 de  $Q_8$  est 2, il serait normal. Maintenant, notez que  $-1$  est le seul élément de  $Q_8$  d'ordre 2. Ainsi, le seul sous-groupe d'ordre 2 de  $Q_8$  est  $\{1, -1\}$ , qui est le centre et donc normal.

**Exercice 6.** Pour cet exercice, nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition 27 : le sous-groupe des commutateurs  $[G, G] \triangleleft G$  est normal dans  $G$ , et pour tout autre sous-groupe normal  $H \triangleleft G$  tel que le quotient  $G/H$  soit abélien, nous avons  $[G, G] \triangleleft H$ .

(1) Le groupe  $A_n$  est simple et non abélien pour tout  $n \geq 5$ , ce qui implique que  $[A_n, A_n] = A_n$  et  $A_n^{ab} = 1$ .

(2) Nous savons que  $V_4 \triangleleft A_4$  est un sous-groupe normal tel que  $A_4/V_4$  est abélien (d'ordre 3). Ainsi,  $[A_4, A_4] \triangleleft V_4$ . Le sous-groupe des commutateurs ne peut pas être trivial puisque  $A_4$  n'est pas abélien. Il ne peut pas être d'ordre 2 puisque  $A_4$  n'a pas de sous-groupe normal d'ordre 2 (car le centre de  $A_4$  n'a pas d'élément d'ordre 2). Donc  $[A_4, A_4] = V_4$  et  $A_4^{ab} = A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

(3) Nous savons que  $A_n \triangleleft S_n$  avec un quotient abélien. Comme  $A_n$  est simple et  $S_n$  n'est pas abélien, nous devons avoir  $[S_n, S_n] = A_n$ . Il s'ensuit que  $S_n^{ab} = S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

(4) Nous avons vu en cours que  $F_S^{ab} = F_S/[F_S, F_S] = \mathbb{Z}^S = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

(5) À partir de la première relation, nous observons que  $a^2 = b^{-3}$ . En substituant dans la seconde relation, il en résulte que  $1 = a^4 b^5 = (b^{-3})^2 b^5 = b^{-6+5} = b^{-1}$ , ce qui signifie que  $b = 1$ . Cela implique que le groupe admet la présentation  $\langle a | a^2 \rangle$ , qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . C'est sa propre abélianisation.

**Exercice 7.** Nous écrivons  $G$  pour le groupe défini par les présentations de chaque point.

(1) Puisque les deux générateurs sont d'ordre 2, la dernière relation implique que

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$

Cela montre que  $G$  est abélien avec deux générateurs d'ordre 2, c'est-à-dire

$$G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

- (2) Soit  $S = \{a, b\}$  et soit  $f : F_S \rightarrow A_4$  l'unique homomorphisme de groupes tel que  $f(a) = (123)$  et  $f(b) = (234)$ , donné par le lemme 16. Comme  $A_4$  est engendré par ces deux 3-cycles (vous pouvez le vérifier à la main), nous avons  $F_S / \ker(f) \cong A_4$ . Soit  $N \triangleleft F_S$  le sous-groupe normal engendré par  $R = \{a^3, b^3, (ab)^2\}$ . Comme ces relations sont satisfaites par leur image par  $f$  dans  $A_4$ , nous obtenons  $N \subset \ker(f)$ . Par définition,  $G = F_S / N$ , donc par le théorème de correspondance,

$$G / \pi(\ker(f)) \cong (F_S / N) / \ker(f) / N \cong F_S / \ker(f) \cong A_4.$$

Cela signifie que  $A_4$  est un quotient de  $G$ . Si nous montrons que  $G$  contient au plus 23 éléments, alors  $|G| = 12$  et  $G = A_4$ . Nous proposons deux solutions pour compter le nombre d'éléments dans  $G$ .

- (a) En utilisant les relations, observez que  $a' := ab$  et  $b' := ba$  satisfont les relations  $a'^2 = b'^2 = (a'b')^2 = 1$ . Par le point précédent, ces deux éléments engendrent une copie de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dans  $G$ . En utilisant  $ab = b^2a^2$ , nous trouvons que

$$\begin{aligned} aa'a^{-1} &= aa'a^2 = aaba^2 = ab^2a^2a^2 = a'b' \in \langle a', b' \rangle \leq G \\ ba'b^{-1} &= bab^3 = b' \in \langle a', b' \rangle \leq G \\ ab'a^{-1} &= a' \in \langle a', b' \rangle \leq G \\ bb'b^{-1} &= b'a' \in \langle a', b' \rangle \leq G \end{aligned}$$

Cela montre que  $\langle a', b' \rangle \triangleleft G$  est un sous-groupe normal. Considérons le sous-groupe  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \leq G$ . Il s'ensuit que

- (i)  $\langle a', b' \rangle \triangleleft G$
- (ii)  $\langle a \rangle \cap \langle a', b' \rangle = 1$ ;
- (iii)  $\langle a \rangle \cdot \langle a', b' \rangle = G$ , car  $b = b'a^2$ , donc ce produit de sous-groupes contient les générateurs de  $G$ ;

Ainsi,  $G$  est un produit semi-direct interne de  $\langle a', b' \rangle$  avec  $\langle a \rangle$ , et donc  $G$  est d'ordre  $|\langle a', b' \rangle| \cdot |\langle a \rangle| = 4 \cdot 3 = 12$ .

- (b) En utilisant les deux premières relations, nous observons que les éléments de  $G$  sont des mots alternant entre  $a$  ou  $a^2$  et  $b$  ou  $b^2$ . Comme  $(ab)^2 = 1$ , nous en déduisons que  $bab = a^2$  et  $aba = b^2$ . Nous comptons le nombre de mots commençant par  $a$  de la forme  $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}b^{k_4} \dots a^{k_r}$  en fonction de leur longueur  $r$ . Il existe deux mots différents de longueur 1. Il existe au plus quatre mots différents de longueur 2, de la forme  $a^{k_1}b^{k_2}$ . Par les relations ci-dessus, les chaînes contenant uniquement des  $a$  et des  $b$  (d'exposant 1) peuvent être réduites à des mots de longueur 1 ou 2. Ainsi, les chaînes de longueur 3 doivent contenir une puissance de 2 au milieu. Comme  $b^2a^2 = ab$ , les chaînes de longueur 3 sont de la forme  $ab^2a$  ou  $a^2b^2a$ . Par un raisonnement similaire, chaque chaîne de longueur 4 peut être réduite à une longueur plus courte. Par conséquent, il existe au plus 10 mots commençant par  $a$ . Un argument similaire montre la même chose pour les mots commençant par  $b$ . Nous concluons que le nombre d'éléments dans  $G$  est borné par 23, comme souhaité.
- (3)  $A_5$  est un groupe simple d'ordre 60, donc il n'a pas de groupe d'ordre 30. Soit  $\sigma = (12345)$  et  $\tau = (12)(34)$ . Si nous montrons que  $\langle \sigma, \tau \rangle$  contient au moins 16 éléments, cela prouvera

que  $A_5 = \langle \sigma, \tau \rangle$ . Nous avons

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (21435)$$

$$\sigma\tau = (135)$$

$$\tau\sigma = (245)$$

$$\sigma^2\tau = (14523).$$

Les trois 5-cycles engendrent des sous-groupes d'ordre 5 qui s'intersectent trivialement, donc ils engendrent  $4 \cdot 3 + 1 = 13$  éléments distincts de  $A_5$ . Les deux 3-cycles engendrent 4 éléments distincts supplémentaires, et donc  $\langle \sigma, \tau \rangle$  contient au moins 17 éléments, comme souhaité.

- (4) Supposons que  $F_S$  soit résoluble. Choisissons deux générateurs distincts  $a, b \in S$  et soit  $R = S \setminus \{a, b\}$ . Nous obtenons que  $F_S/R = \langle S|R \rangle = \langle a, b \rangle = F_{\{a,b\}}$  est un groupe libre engendré par deux éléments (exercice 4). Nous avons observé au point précédent que  $A_5$  peut être engendré par deux éléments, disons  $\alpha, \beta \in A_5$ . La propriété universelle des groupes libres nous dit qu'il existe un unique homomorphisme de groupes  $f : F_{\{a,b\}} \rightarrow A_5$  tel que  $f(a) = \alpha$  et  $f(b) = \beta$ . Comme ces éléments engendrent  $A_5$ , nous obtenons que  $f$  est surjectif et donc  $A_5 \cong F_{\{a,b\}} / \ker(f)$ . Comme les quotients de groupes résolubles sont résolubles, cela impliquerait que  $A_5$  est résoluble. C'est une contradiction car  $A_5$  est simple.